

De kracht van rijke rekenvragen

Een pleidooi om vragen te stellen waar je het antwoord nog niet op weet

Zoek je manieren om jouw leerlingen bij rekenwiskunde meer te laten nadenken? Wil je hen actief en samen laten leren? En wil je dat ze gemotiveerder én beter gaan rekenen? Ga dan de uitdaging aan en werk met rijke rekenvragen!

Anneke Noteboom

De auteur was tijdens het schrijven van dit artikel werkzaam bij SLO.

Vragen naar de bekende weg?

Stel je voor, je loopt op straat en een onbekende spreekt je aan. Hij vraagt hoe laat het is. Jij kijkt op je horloge en vertelt hem de tijd. Hij kijkt op zijn eigen horloge en zegt, 'klopt'. Waarschijnlijk kijk je hem dan verbaasd aan, want waarom stelt hij een vraag waar hij het antwoord al op weet? Buiten school stellen we meestal vragen waar we het antwoord niet op weten. Je vraagt hoe laat het is, omdat je geen klok bij de hand hebt, je gaat zoeken op internet als je iets niet weet. Hoe anders is dat op school. Wij stellen in de rekenlessen voornamelijk vragen waarop we het antwoord wél weten. We willen niet eens zozeer het antwoord horen alswel weten of de leerlingen het goede antwoord geven. Deze vragen zijn vooral gericht op het reproduceren van feitenkennis en procedures. Met de vraag 'Hoe laat is het?' gaan we na of de leerlingen de vaardigheid van het klokkijken beheersen. Als we snel het antwoord op 7×8 willen horen, controleren we of de leerling deze vermenigvuldiging heeft gememoriseerd. Feitenkennis en het kunnen uitvoeren van procedures zijn onmisbaar, maar wiskunde leren en reken-wiskundig bekwaam zijn, gaat verder. Dat vraagt van leerlingen dat zij deze

feiten en vaardigheden met inzicht kunnen gebruiken, ze toepassen in nieuwe situaties en er creatief mee om kunnen gaan. Het vraagt bijvoorbeeld ook dat leerlingen reken-wiskunde problemen kunnen analyseren, er kritisch over kunnen denken en redeneren én er met elkaar over kunnen communiceren. Allemaal aspecten van wiskundig denken. En dat is onmisbaar om reken-wiskundig bekwaam te worden. Vragen stellen is een goed middel om leerlingen aan te zetten tot nadenken en leren, maar dan moeten we wél vragen stellen die ook wiskundig denken uitlokken.

Vragen stellen die het denken stimuleren

Er is veel geschreven over het stellen van vragen in het onderwijs en het blijkt dat leraren gedurende een schooldag 60% van wat ze vertellen in de vorm van vragen stellen doen (Sullivan en Lilburn, 2005). Dains (1986) constateerde in onderzoek dat 93% van de vragen die leraren stellen 'lagere orde-vragen' zijn: vragen die zich richten op het reproduceren van feiten en procedures. Binnen het vakgebied rekenen-wiskunde zijn dit echter niet de vragen die het wiskundig denken van leerlingen stimuleren. Daarvoor zijn

hogere orde-vragen nodig, zoals open vragen die gericht zijn op onder andere wiskundig probleemoplossen, kritisch denken en redeneren. Nationaal en internationaal is er veel aandacht voor toekomstgerichte, brede vaardigheden¹. Dit zijn vaardigheden die juist een beroep doen op dat 'hogere orde' denken. Curriculum.nu (2019) hanteert drie groepen van brede vaardigheden: manieren van denken en handelen, manieren van omgaan met anderen en manieren van jezelf kennen. Binnen manieren van denken belichten ze 'creatief denken en (praktisch) handelen', 'probleemoplossend denken en (praktisch) handelen' en 'kritisch denken'. Deze 'manieren van denken' sluiten nauw aan bij wat we in het vakgebied rekenen-wiskunde nastreven. Daarom is het van belang dat we onderwijs bieden dat dit denken uitlokt. De zogenaamde rijke rekenvragen bieden hiervoor mogelijkheden.

Wat zijn rijke rekenvragen? En waaraan moeten ze voldoen?

Er is veel geschreven over hogere-orde-denken en hoe je dat bij rekenen-wiskunde kunt inzetten. De lijst van kenmerken is te groot om hier op te noemen. We vatten ze samen in vier hoofdkenmerken² en gaan uit van de term 'rijke rekenvragen'.

- *Rijke rekenvragen doen een beroep op wiskundig denken.*
Ze vragen niet alleen om het inzetten van kennis en procedurele vaardigheden, maar doen ook een beroep op bijvoorbeeld inzicht, probleemoplossen, analyseren, creatief denken, kritisch denken en redeneren, uitleggen en samen overleggen.
- *Rijke rekenvragen hebben (meestal) meerdere acceptabele antwoorden.*
Een vraag als 'welk van deze figuren is een vierkant', verwijst naar een kennisvraag. Er is maar één goed antwoord. Maar stellen we de vraag 'hoe kun je iemand uitleggen wat een vierkant is?' dan gaat het veel verder dan alleen de kennis van een vierkant. Kinderen moeten dieper nadenken over de kenmerken van een vierkant en deze kennis actief toepassen, erover redeneren en het uitleggen.
Dat geldt ook voor een opgave als $6 \times 8 = ?$. Als we deze vraag omdraaien en vragen: 'Ik weet dat de uitkomst van een vermenigvuldiging 48 is, wat kan de opgave dan zijn,' dan zijn veel meer antwoorden mogelijk, zoals 8×6 tot $4 \times 2 \times 2 \times 3$ of zelfs $\frac{1}{2} \times 84$.
Rijke rekenvragen zijn meestal juist open vragen waarbij méér antwoorden mogelijk zijn of verschillende redeneringen gevolgd kunnen worden.



- *Rijke rekenvragen zijn gericht op het leren tijdens het oplossingsproces.*
Ze waarborgen dat leerlingen tijdens het proces van oplossen, puzzelen, zoeken, rekenen, redeneren, en uitleggen ook nieuwe inzichten en vaardigheden leren. Ze ontdekken terwijl ze bezig zijn ineens een regel, zien structuren en relaties en zien dat anderen andere oplossingen hebben. Ze denken na over wat wel en niet kan, zoals waarom je geen oneven uitkomst kunt krijgen als je twee oneven getallen optelt.
- *De reacties van leerlingen op rijke rekenvragen geven informatie over hun leren.*
Leerlingen kunnen op verschillend niveau met een rijke rekenvraag aan de slag gaan. Ze kunnen zich beperken tot één mogelijk antwoord, ze kunnen er meer zoeken of ze kunnen proberen alle mogelijke antwoorden te vinden of een regel proberen te ontdekken. Ook in hun redeneringen kunnen verschillen zitten: het kunnen informelere of meer formele redeneringen zijn. Rijke rekenvragen zijn daarom behulpzaam bij het formatief evalueren.

Deze rekenvragen zijn uitermate geschikt om inzicht in en nadenken over 'rekenen en wiskunde' te verdiepen en te vergroten. Dit geldt voor alle leerlingen, van alle leeftijden en alle niveaus. Ze komen echter nog betrekkelijk weinig voor in de rekenmethodes. Van Zanten en Van den Heuvel-Panhuizen (2019) constateerden dat het percentage rekenproblemen in de materialen voor groep 6, 7 en begin groep 8 waarbij een zekere mate van wiskundig denken gevraagd wordt varieert van slechts 3,2% tot 8,7%. Meer dan 90% zijn dus rechttoe-rechtaan opgaven³.

Schappen, kippen en een feestje

Rijke rekenvragen zijn dus belangrijk, moeten aan bepaalde kenmerken voldoen en komen nog weinig voor in de huidige rekenmethodes in het basisonderwijs. Hierna volgen vijf concrete voorbeelden, passend bij verschillende leerjaren en verschillende domeinen, met reacties van leerlingen met uiteenlopend rekenniveau.

1. Onze kinderen zijn samen 10 jaar

In het rekenwerkboek staan verschillende rijtjes met splitsommen die de leerlingen moeten invullen. Het doel is 'oefenen van de splitsingen onder 10'. Maar we kunnen ook onderstaand 'rijk probleem' aanbieden. Dit probleem vraagt naast kennis en vaardigheden rond splitsen óók om wiskundig denken, creatief denken en redeneren.

Leerlingen van verschillende leeftijden met uiteenlopend niveau gingen met dit probleem aan de slag.



We hebben een feestje zaterdag.
 Dan zijn onze kinderen samen 10 jaar.
 Kom je ook?
 Hoe oud kunnen die kinderen zijn?

Ze kwamen unaniem meteen met de bekende splitsingen van 10 (zie kader hieronder) zoals 5 en 5 of 7 en 3. Ze zijn immers gewend dat het bij splitsen altijd om een splitsing in twee groepjes en of getallen gaat. Maar als de leerkracht opmerkt dat het misschien helemaal niet over twee kinderen gaat, zie je een verandering in reactie en actie van de leerlingen. Er gaat een lichtje branden! Ze gaan gedreven aan de slag en al gauw bedenken ze een scala aan verschillende oplossingen, waaronder ook creatieve

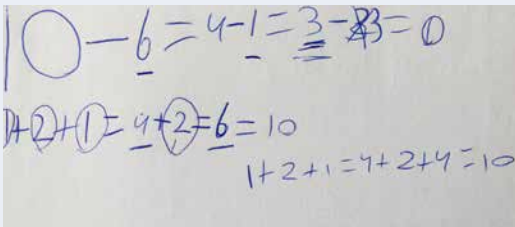
oplossingen (een tienling van 1, vijf tweelingen, enzovoort). De notaties van de kinderen laten vaak hun denkniveau zien, maar je ziet hieraan ook snel wat er mogelijk fout gaat. Als de leerkracht het probleem vervolgens (iets) complexer maakt door restricties te geven vraagt ze van de leerlingen nog meer redeneren:

- Ik heb gehoord dat er drie kinderen zijn, waarvan er eentje ouder is dan 6;
- Er zijn drie kinderen en er zit één tweeling bij.
- Er zijn vier kinderen, maar geen tweeling.
- Alle kinderen hebben een oneven leeftijd.

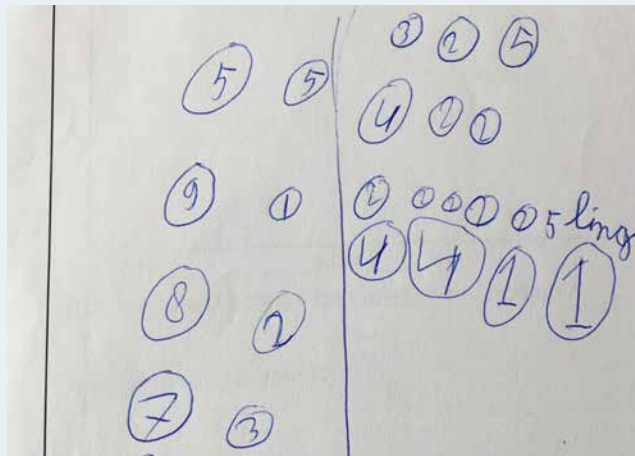
Gezamenlijk bespreken ze de verschillende oplossingen, staan ze stil bij meer en minder waarschijnlijke oplossingen en gaan ze dieper in op wat splitsen nu eigenlijk is. Vervolgens bedenken de leerlingen ook dergelijke puzzels voor elkaar, zowel makkelijke als moeilijke varianten.

Noten

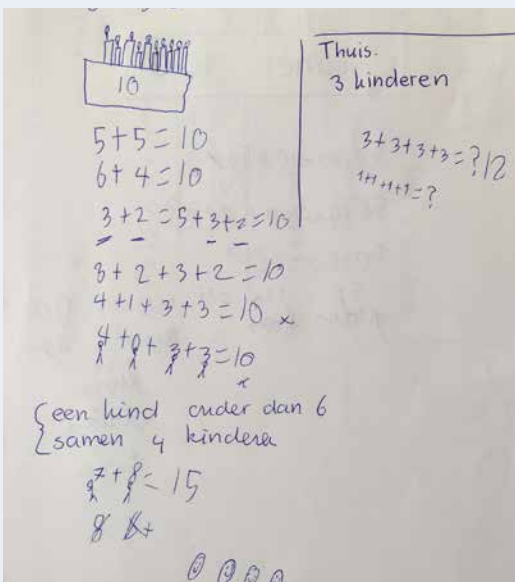
- ¹ Deze vaardigheden worden ook wel de 21e-eeuwse vaardigheden genoemd.
- ² Bewerking van de definitie van Sullivan & Lilburn (2005).
- ³ Zie voor een toelichting wat men onder 'rekenproblemen' verstaat en wat de precieze percentages per methode en per leerjaar zijn, het artikel 'Probleemoplossen in reken-wiskundemethodes' in jaargang 38 van dit tijdschrift.



Anna, een gemiddelde leerling uit groep 5, gebruikt formele rekentaal, maar raakt verstrikt in haar notatie.



Oplossingen van Kenzo, een zwakke rekenaar uit groep 5



Oplossing van Hugo, een zwakke rekenaar in groep 5. Hij gebruikt de formele notatie, raakt even in de knoei bij 'meer kinderen die samen 10 zijn', maar na een kleine feedbackopmerking, kan hij verder. Tijdens het oplossen zien we aan Hugo dat hij gebruik maakt van vorige oplossingen: 'van 5 kan ik 3 en 2 maken'



Oplossingen van Benthe, een zwakke leerling in groep 6

2. Schapen en kippen

Stel dat het leerdoel is: 'Vermenigvuldigen met 2 en 4 en de relatie hiertussen,' dan kunnen we stellen als:

Hoeveel poten hebben de volgende combinaties van dieren in totaal?

- 6 schapen en 4 kippen
- 8 schapen en 3 kippen
- 2 schapen en 8 kippen, enz.

Daarbij gaat het erom dat de kinderen rechttoe, rechtaan volgens een bekende routine antwoorden kunnen geven (zie kader, antwoord 1). Maar we kunnen ook de volgende vraag stellen: 'Ik zie 40 poten, hoeveel schapen en hoeveel kippen kunnen dat zijn?' Dan zullen de meeste kinderen niet meteen weten hoe ze dit 'niet-routine' probleem kunnen oplossen. Bovendien zijn er veel verschillende antwoorden mogelijk terwijl het steeds om hetzelfde leerdoel gaat. Als je kijkt naar de antwoorden van leerlingen (zie kader) dan zie je uiteenlopende reacties: erg verschillende manieren van aanpak en notaties, de een meer formeel, de ander minder formeel, maar ook veel meer oplossingen. Als aan de kinderen gevraagd wordt of ze samen meer oplossingen kunnen vinden gaan ze op zoek naar relaties tussen de verschillende oplossingen. We kunnen differentiëren door verschillende aantallen te geven en de kinderen kunnen zelf problemen bedenken voor elkaar, maar we kunnen ook variëren in complexiteit, waardoor het wiskundig denken meer wordt aangesproken:

- Er zijn 74 poten, en in totaal 21 dieren. Bedenk wat er allemaal mogelijk is.
- Waarom kunnen niet alle aantallen poten? Leg eens uit hoe dat zit.



▲ Illustratie: Anneke Aartsen

- Als we het aantal schapen verminderen, wat gebeurt er dan met het aantal kippen? Laat eens zien.

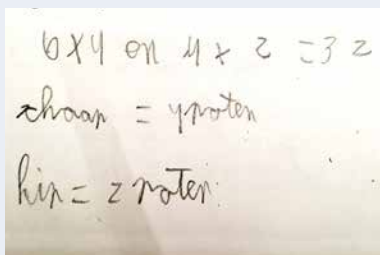
Aan de verschillende oplossingen en notaties kunnen we veel aflezen wat betreft het niveau van oplossen (tekenen en rekenen) en aan het denken en redeneren van de leerlingen. Zo zien we dat Lynn (een goede leerling!) zich verliest in formeel rekenen. Jip en Thom laten een bepaalde systematiek zien en Thom ontdekt tijdens het rekenen een regel! Hij leert dus tijdens het oplossingsproces.

3. Zwaar, zwaarder, zwaarst

Standaardvraag (aan kleuters)

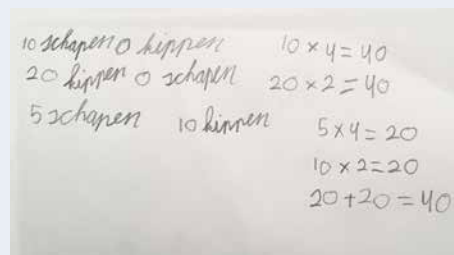
Wat is zwaarder, wat is het zwaarst? De komkommer of het doosje champignons? Zoek eens uit of je gelijk hebt.

Er zijn 6 schapen en vier kippen, hoeveel poten?



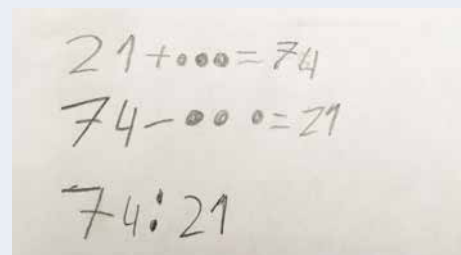
Kelly

Er zijn 40 poten. Hoeveel schapen en hoeveel kippen kunnen dat zijn?

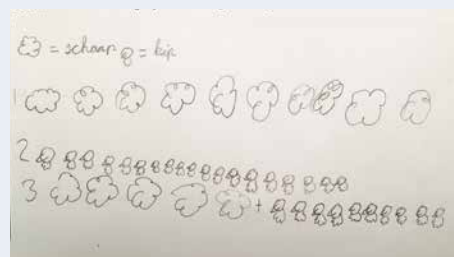


Jip

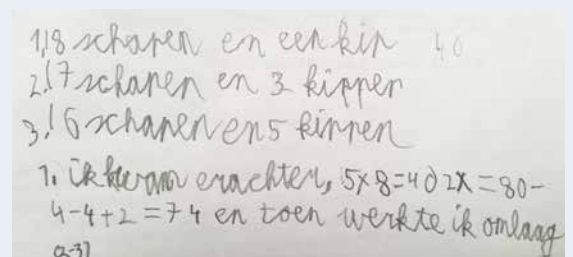
Er zijn 74 poten, in totaal zijn er 21 dieren. Hoeveel schapen en hoeveel kippen kunnen dat zijn?



Lynn



Kenzo



Thom

Alternatieve vragen:

- Zoek eens iets in het lokaal dat zwaarder/lichter/veel zwaarder/veel lichter is dan dit boek.
- Kun je ook iets vinden dat ongeveer even zwaar is als het boek? Waarom denk je dat je gelijk hebt? Hoe kunnen we erachter komen of we gelijk hebben?
- Is iets dat groter is ook altijd zwaarder? Hoe kun je dat zeker weten?

4. Gemiddelde berekenen

Standaardvraag:

De kinderen van de familie Westerveld zijn 7, 8 en 12 jaar oud. Wat is hun gemiddelde leeftijd?

Alternatieve vragen:

De gemiddelde leeftijd van de drie kinderen is 9 jaar.

- Hoe oud kunnen de kinderen zijn?
- Kunnen ze allemaal een even/oneven leeftijd hebben? Leg eens uit.

5. Omtrek

Standaardvraag:

Hoeveel cm is de omtrek van deze figuur?

Alternatieve vragen/opdrachten:

- Teken figuren met een omtrek van 25 cm.
- Kun je het ook met meer of minder zijden? Waar let je dan op?
- Leg eens uit hoe je de omtrek van een figuur kunt vinden.

Laten we vaker vragen naar de onbekende weg!

Waarom stellen we buiten school vragen waarop we het antwoord niet weten en stellen we binnen de school vooral vragen waar we het antwoord wél op weten? Daarmee begon dit artikel. We constateren dat er binnen het reken-wiskundeonderwijs vooral sprake is van het stellen van gesloten vragen gericht op feiten en procedures. Maar we weten ook dat leerlingen juist gebaat zijn bij het werken aan open, rijke rekenvragen waar je als leraar zelf ook de antwoorden niet op weet. Je weet niet waar leerlingen mee komen en je bent nieuwsgierig naar hun denken en redeneren. Je daagt ze uit om hun reacties en redeneringen te vertellen. Ze werken meer betrokken en gemotiveerd en leren op een dieper niveau. Moet de rekenmethode dan overboord? Nee, natuurlijk niet. Maar het is wel nodig dat we vaker rijke rekenvragen stellen. Je leerlingen zullen er blij mee zijn. Of, zoals Kenzo (groep 5) reageerde: 'Dit is veel leuker want mijn hersenen moesten kraken.'

In het artikel 'Rijke rekenvragen ontwerpen voor je lessen' op pagina 28 vind je twee stappenplannen die je kunt gebruiken om zelf rijke rekenvragen te ontwerpen.

Literatuur

- Curriculum.nu (2018). Handreiking brede vaardigheden. Den Haag: Curriculum.nu.
- Dains, D. (1986). Are Teachers Asking the Right Questions? *Education 1*, 4 p. 368-374.
- Drijvers, P. (2015). Kernaspecten van wiskundig denken. *Euclides jaargang 90, 2015, nummer 5*, 4-8.
- Hattie, J. Fisher, D. & Frey, N. (2017). *Visible learning for Mathematics. What works Best to Optimize Student Learning, Grades K-12*. Thousand Oaks, USA: Corwin.
- Noteboom, A., Van Silfhout, G. & Tammes, A.C. (2019). *Formatief evalueren in het primair onderwijs. Werken aan groei*. Enschede: SLO.
- Sullivan, P. & Lilburn, P. (2005). *Good questions for Math teaching. Why ask them and what to ask. Grades K-6*. Sausalito, USA: Math Solutions.
- Van Zanten, M. (2017). Vragen die leren stimuleren. *Volgens Bartjens jaargang 36, mei 2017, nummer 5*, 4-8.
- Van Zanten, M. & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2019). Probleemoplossen in reken-wiskundemethodes. *Volgens Bartjens jaargang 38, januari 2019, nummer 3*, 22-27.



Bewijs uit het gerijmde

Jaap van Lakerveld | Illustratie: Marjolijn Brouwer

Berekenbaar

Hoeveel mensen kunnen er in klassen
Op anderhalve meter van elkaar,
Een leerling hier, een leerling daar,
Welk aantal zou er in een schoolklas passen?

En als er dan eens eentje moet gaan plassen,
Hoe speel je dat dan weer verantwoord klaar
En hoe beperk je dan ook het gevaar,
Ook als ze telkens handen moeten wassen?

Als iedereen blijft zitten op zijn plek,
Dan valt het allemaal wel te berekenen,
Maar als ze lopen, wat zal dat betekenen?
Van het idee alleen al word ik gek.

Toch, door rekenen en door statistieken
Voorkomen knappe koppen nog meer zieken

